بررسی اثر محرک پیزوالکتریک بر رفتار کمانش و ارتعاشی تیرهای اویلر- برنولی تحت نیروی محوری★

حسن بیگلری[۱]   وحید عرب‌ملکی[۲]   نیما جعفرزاده اقدم[۳]

چکیده استفاده از لایه‌های پیزوالکتریک تأثیر قابل ملاحظه‌ای بر رفتار ارتعاشی و ظرفیت باربری سازه‌ها دارد. به‌منظور استفادهٔ بهینه از مواد پیزوالکتریک می‌توان به‌جای لایهٔ سرتاسری از وصله‌های پیزوالکتریک استفاده کرد. هدف تحقیق حاضر بررسی تأثیر وصله‌های پیزوالکتریک و شرایط مرزی بر رفتار کمانش و ارتعاشی تیر اویلر-برنولی تحت بار محوری می‌باشد. تأثیر تنش‌های اعمالی از طرف وصله‌های پیزوالکتریک با استفاده از تابع هوی‌ساید در معادلات حرکت اعمال شده و با استفاده از روش گالرکین، معادلهٔ مشخصهٔ حاکم بر رفتار ارتعاشی سیستم استخراج شده است. نتایج نشان می‌دهد که فرکانس‌های طبیعی و بار بحرانی تیر به ولتاژ، طول و موقعیت وصله‌های پیزوالکتریک و هم‌چنین نیروی محوری بستگی دارد که این تأثیرات با استفاده از نمودارهای مناسبی ارائه و مورد بحث قرار داده شده است. نتایج نشان می‌دهد که وصله‌های پیزوالکتریک واقع در وسط تیر بیشترین تأثیر را بر روی فرکانس‌های طبیعی و ظرفیت کمانش تیر دارند.

واژه‌های کلیدی تیر اویلر- برنولی; فرکانس طبیعی; نیروی محوری; بار بحرانی کمانش; وصلهٔ پیزوالکتریک.

Effect of Piezoelectric Patches on the Vibration and Buckling of Euler-Bernoulli Beams under Axial Load

H. Bighlari   V. A. Maleki   N. Jafarzade Aghdam

Abstract *Piezoelectric layers have significant effect on the vibration behavior and buckling capacity of the structures. For optimum usage of piezoelectric materials, it is possible to use the piezoelectric patches instead of the piezoelectric layers. In this paper, the effects of piezoelectric patches and boundary conditions on the buckling and vibration behaviors of Euler-Bernoulli beams is investigated. The piezoelectric stress resultants are introduced in terms of Heaviside discontinuity functions and the characteristics equation is obtained via Galerkin method. The effects of variation of location, length of the piezoelectric patches and the applied voltages on the natural frequencies and critical buckling loads of beam with different boundary conditions are investigated. Results show that the natural frequencies and critical buckling load are dependent on the voltage, length and location of the piezoelectric patches and the axial load. Also, patches have a considerable effect if they placed at the beam center.*

Key Words Euler-Bernoulli beam; Natural Frequency; Axial Load; Buckling load; Piezoelectric Patch.

★تاریخ دریافت مقاله ۹۳/۵/٤ و تاریخ پذیرش آن ۹٤/۵/۱۰ می‌باشد.

(۱) استادیار، دانشکدهٔ مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز.

(۲) نویسندهٔ مسئول: دانشجوی دکتری، دانشکدهٔ مهندسی مکانیک، گروه مهندسی مکانیک، دانشگاه تبریز. Vahid_maleki@tabrizu.ac.ir

(۳) باشگاه پژوهشگران جوان و نخبگان، واحد تبریز، دانشگاه آزاد اسلامی، تبریز، ایران.

مقدمه

تیرهـای تحـت نیـروی محـوری کـاربرد وسـیعی در زمینه‌های مهندسی عمران، مکانیک و هوافضا دارند. بـا توجه به این‌که نیروی محوری تأثیر قابل ملاحظه‌ای در کاهش یا افزایش سفتی این گونه سـازه‌هـا و در نتیجـه رفتار ارتعاشی و پایداری مکانیکی آنهـا دارد، بنـابراین بررسی رفتار ارتعاشی و پایداری مکانیکی تیرهـا مـورد توجه بسیاری از محققان قرار گرفته است.

در سـال‌هـای اخیـر و بـا گسـترش روز افـزون تکنولوژی استفاده از مواد پیزوالکتریـک بـرای افـزایش ظرفیت باربری تیرها و ایجاد تغییرات مطلوب متناسب با نیاز مـورد اسـتفاده، بـه‌عنـوان مثـال افزایش/کـاهش فرکانس‌هـای طبیعـی سـازه، مـورد توجـه بسـیاری از محققان قرار گرفته است [7-1]. محققـان در دهـه‌هـای اخیر، به‌منظور تعدیل نیروهای خـارجی وارد شـده بـه سازه و در نتیجه کاهش ارتعاشات سازه، از عملگرهای پیزوالکتریک بهره برده‌اند [8]. براساس مطالعات انجـام شده به‌منظور تأثیرگذاری مواد پیزوالکتریک بر پایداری سـازه، از دو روش ایجـاد گشـتاور خمشـی در سـازه [9, 10] که باعث کاهش خیز سـازه مـی‌شـود و ایجـاد نیروی کششـی بـا اسـتفاده از لایـه‌هـای پیزوالکتریـک [14-10] به‌منظور مقابله با نیروی محـوری فشـاری در سازه‌ها استفاده مـی‌شـود. مـورینی و همکـاران [9] بـا استفاده از یک مدل تحلیلی به بررسی پایداری تیرهـای انعطاف‌پذیر بـا اسـتفاده از محـرک‌هـای پیزوالکتریـک پرداختند. وانگ [10] بـا اسـتفاده از مـدل تحلیلـی بـه بررسی افزایش ظرفیت بـاربری سـتون‌هـای نـازک بـا استفاده از لایه‌های پیزوالکتریـک کـه بـه‌منظـور ایجـاد نیروی محوری به‌صورت متقارن بـه سـطوح بـالایی و پایینی تیر متصل شده‌اند پرداخته است. نتایج مطالعـات او نشان می‌دهد موقعیت و ولتاژ اعمـالی بـه لایـه‌هـای پیزوالکتریک بر ظرفیـت بـاربری ایـن سـتون‌هـا تـأثیر می‌گذارد و به‌منظوراستفادهٔ بهینه باید موقعیـت و ولتـاژ مناسب مورد مطالعـه قـرار بگیـرد. ایـن تحقیـق روش جدیدی را به‌منظور افزایش ظرفیت باربری ستون‌ها بـا استفاده از مواد پیزوالکتریک ارائه داده است. دلا و شـو [15] بـا اسـتفاده از روش ریلـی بـه بررسـی تعـداد وصله‌های پیزوالکتریک، هم‌چنین تأثیر متقابل آنهـا بـر رفتار ارتعاشی تیر اویلر- برنولی پرداخته‌اند. سـلوس و همکاران [16] با استفاده از تابع گرین، کنترل ارتعاشات تیر تحت نیروی محوری دارای وصله‌های پیزوالکتریک را مورد مطالعه قرار دادند. آنها با مدنظر قرار دادن سـه طول مختلف بـرای وصـلهٔ پیزوالکتریـک، اثـر نیـروی محوری و ولتـاژ اعمـالی بـه پیزوالکتریـک را بـر روی دامنهٔ ارتعاشی نقطهٔ انتهایی تیر یکسـر گیـردار بررسـی کرده‌اند. چـابرا و همکـاران [17] بـا اسـتفاده از روش المان محدود به طراحی و تحلیل سیسـتم کنتـرل فعـال ارتعاشی تیرها با اسـتفاده از وصـله‌هـای پیزوالکتریـک پرداخته‌انـد. آنهـا بـا مـدنظر قـرار دادن سـه موقعیـت مختلف بـرای وصـله‌هـای پیزوالکتریـک، جابجـایی و کاهش دامنه ارتعاشی تیر را مورد مطالعه قرار داد.

آلدرایحم و همکاران [18] مطالعاتی تجربی بـرای بهینه‌سازی مکان و اندازهٔ پیزوسرامیک‌ها انجـام دادنـد. خدیر و آلدرایحم [19] با استفاده از توابع ناپیوسـتگی، بررسی تغییر شکل تیرها به‌وسیلهٔ قطعات پیزوالکتریک کششی و برشی را مورد مطالعه قرار دادنـد. هـم‌چنـین آنها در مطالعـه‌ای دیگـر [20] مـدلی تحلیلـی را بـرای بررسـی تغییـر شـکل تیـر بـا چنـدین جفـت وصـلهٔ پیزوالکتریک ارائه کردند.

نیکخو [21] به بررسـی پاسـخ ارتعاشـی و کنتـرل تیرهای نازک با استفاده از محرک‌های پیزوالکتریـک در حضور بار دینـامیکی پرداختـه اسـت. وی ناپیوسـتگی ناشی از وجود محرک‌های پیزوالکتریک را بـه‌صـورت پیوسته در معادلات اعمال کرده و تـأثیر بـار دینـامیکی ناشی از ضربه، نیروی متحـرک و جـرم متحـرک را بـر پاسخ تیر مورد مطالعه قرار داده است. در جدیـدتـرین تحقیق انجـام شـده در زمینـهٔ اسـتفاده از محـرک‌هـای پیزوالکتریک، دوکارن و همکاران [22] به بهینـه‌سـازی

موقعیت و اندازهٔ وصله‌های پیزوالکتریک به‌منظور کاهش دامنهٔ ارتعاشات تیرها پرداخته‌اند. نتایج تحقیق آنها نشان می‌دهد که در کاهش دامنهٔ ارتعاشی با استفاده از محرک پیزوالکتریک، ضخامت وصلهٔ پیزوالکتریک یکی از مؤثرترین پارامترها می‌باشد. آنها در تحقیق خود به ارائهٔ پارامترهای بهینه برای کاهش دامنهٔ ارتعاشی تیر پرداخته‌اند و نحوهٔ تأثیر این پارامترها بر فرکانس‌های طبیعی و بار کمانش را مورد بررسی قرار نداده‌اند.

بررسی مطالعات انجام شده در این زمینه نشان می‌دهد که هر چند در زمینهٔ رفتار ارتعاشی و کمانش تیرها تحت تأثیر وصله‌های پیزوالکتریک مطالعات گسترده‌ای صورت پذیرفته است، اما در هیچ یک از این مطالعات تأثیر پارامترهای موقعیت و طول وصله‌های پیزوالکتریک بر فرکانس‌های طبیعی و بار کمانش مورد بررسی قرار نگرفته است.

در تحقیق حاضر به‌منظور مطالعهٔ تأثیر پارامترهای موقعیت و طول محرک پیزوالکتریک و هم‌چنین شرایط مرزی بر فرکانس‌های طبیعی، رفتار ارتعاشی و پایداری مکانیکی تیر اویلر- برنولی تحت نیروی محوری و تأثیر دو وصلهٔ پیزوالکتریک که به‌صورت متقارن به سطوح بالایی و پایینی تیر متصل شده‌اند، مورد بررسی قرار می‌گیرد. در مدل‌سازی و مطالعهٔ رفتار ارتعاشی از تئوری تیر اویلر-برنولی استفاده شده و اثر ناپیوستگی ناشی از محرک پیزوالکتریک که باعث ایجاد نیروی محوری موضعی در تیر می‌شود با استفاده از تابع هوی‌ساید در معادلات حاکم اعمال شده است. پس از حل معادلات با استفاده از روش گالرکین به مطالعهٔ رفتار ارتعاشی و تأثیر پارامترهای مختلفی همانند نیروی محوری، ولتاژ اعمالی، موقعیت و طول محرک پیزوالکتریک بر فرکانس‌های طبیعی و بار کمانش تیر پرداخته می‌شود.

مدل ریاضی تیر اویلر- برنولی با محرک پیزوالکتریک

ویژگی‌های هندسی تیر اویلر- برنولی تحت نیروی محوری و مجهز به وصلهٔ پیزوالکتریک که به‌صورت متقارن به آن متصل شده است، در شکل (۱) نشان داده شده است. اگر وصله‌های پیزوالکتریک نسبت به تیر متقارن و جهت قطبیده شدن آنها عمود بر محور طولی تیر باشد، در این‌صورت با اعمال ولتاژ الکتریکی V به وصله‌های پیزوالکتریک قرار گرفته در بالا و پایین تیر، نیروی ایجاد شده توسط وصله‌های پیزوالکتریک به‌صورت نیروی محوری خالص خواهد بود [23]. تنش محوری ایجاد شده در مرز مشترک تیر و لایه‌های پیزوالکتریک از رابطهٔ زیر قابل محاسبه است:

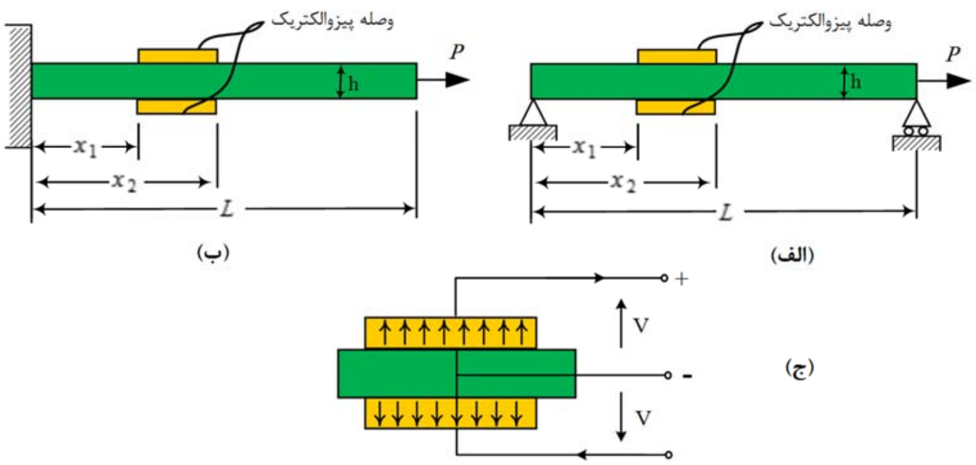
$$\sigma_x = -\bar{e}_{31}E_z \qquad (۱)$$

که در آن E_z میدان الکتریکی پیزوالکتریک می‌باشد. با توجه به رابطهٔ فوق، نیروی محوری ایجاد شده در تیر را می‌توان به‌صورت زیر محاسبه کرد [23]:

$$F_p = -2bh_1E_z\bar{e}_{31} = -2b\bar{e}_{31}V \qquad (۲)$$

در رابطهٔ اخیر $E_z = V/h_1$، $\bar{e}_{31}$ ثابت نفوذپذیری پیزوالکتریک، b و h_1 به‌ترتیب پهنا و ضخامت لایه پیزوالکتریک می‌باشد. همان‌طور که از رابطهٔ (۲) مشاهده می‌شود، اعمال ولتاژ الکتریکی باعث ایجاد نیروی محوری در تیر می‌شود. از این نیروی محوری ناشی از لایهٔ پیزوالکتریک می‌توان برای تغییرات مشخصه‌های ارتعاشی و بار بحرانی تیر بهره برد.

با توجه به اینکه در مقالهٔ حاضر ضخامت لایهٔ پیزوالکتریک نسبت به تیر بسیار کم می‌باشد، از اثر ضخامت آن صرف‌نظر می‌شود و به‌منظور در نظر گرفتن اثرات نیروی محوری ناشی از وصله‌های پیزوالکتریک از رابطهٔ (۲) استفاده می‌شود.



شکل ۱ تیر اویلر- برنولی، (الف) دو سر ساده با محرک پیزوالکتریک، (ب) یکسر گیردار با محرک پیزوالکتریک و (ج) مدار الکتریکی لایهٔ پیزوالکتریک با اختلاف پتانسیل V

معادلهٔ حرکت حاکم بر رفتار ارتعاش عرضی تیر اویلر-برنولی تحت نیروی محوری به‌صورت زیر می‌باشد [24, 25]:

$$EI\frac{\partial^4 w(x,t)}{\partial x^4} - F\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial x^2} + \rho A\frac{\partial^2 w(x,t)}{\partial t^2} = 0 \qquad (۳)$$

که در آن $w(x,t)$ خیز عرضی تیر، ρ جرم واحد حجم، EI سفتی خمشی و F نیروی محوری کششی اعمالی به تیر می‌باشد.

با توجه به این‌که وجود وصله‌های پیزوالکتریک باعث ایجاد ناپیوستگی در معادلات حرکت سیستم می‌شود، بنابراین در تحقیق حاضر به‌منظور در نظر گرفتن این ناپیوستگی از تابع هوی‌ساید استفاده می‌شود. وصله‌های پیزوالکتریک که به‌صورت موضعی و متقارن به تیر متصل شده‌اند، باعث ایجاد نیروی محوری موضعی می‌شوند. برآیند نیروی محوری اعمالی به تیر که مجموع نیروی محوری P و نیروی محوری ناشی ازوصله‌های پیزوالکتریک است را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$F = P + F_p\{H(x-x_1) - H(x-x_2)\} \qquad (٤)$$

با جای‌گذاری رابطهٔ (٤) در معادلهٔ حرکت (۳) و در نظر قرار دادن پاسخ سیستم به‌صورت $w(x,t) = W(x)e^{i\omega t}$، معادله حرکت حاکم بر قسمت مکانی به‌صورت زیر به‌دست می‌آید [10]:

$$EI\frac{d^4W(x)}{dx^4} - \rho A\omega^2 W(x) - \left(P + F_p\{H(x-x_1) - H(x-x_2)\}\right)\frac{d^2W(x)}{dx^2} = 0 \qquad (٥)$$

با توجه به عدم امکان حل تحلیلی معادلهٔ فوق، برای حل از روش گالرکین استفاده می‌شود. بدین منظور پاسخ فرضی معادلهٔ اخیر به‌صورت زیر در نظر گرفته می‌شود:

$$W(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i \phi_i(x) \qquad (٦)$$

که در آن $\phi_i(x)$ توابع مقایسه‌ای هستند و شرایط مرزی حاکم بر مسأله را ارضا می‌کنند و $c_i\ (i = 1 \rightarrow n)$ ثابت‌های مجهولی هستند که از حل معادله مقدار ویژه به‌دست می‌آیند. به‌منظور افزایش دقت محاسبات، توابع $\phi_i(x)$ شکل مودهای ارتعاشی تیر اویلر- برنولی یکسر

گیردار تحت نیروی محوری در نظر گرفته می‌شوند. با صرف‌نظر کردن از اثرات محرک‌های پیزوالکتریک، شکل مودهای طبیعی از حل معادلهٔ دیفرانسیل زیر به‌دست می‌آیند:

$$EI\frac{d^4\phi_n(x)}{dx^4}-P\frac{d^2\phi_n(x)}{dx^2}-\rho A\omega_n^2\phi_n(x)=0 \qquad (۷)$$

که در آن ω_n فرکانس طبیعی متناظر با شکل مود nاُم می‌باشند. جواب معادلهٔ (۷) را می‌توان به‌صورت زیر به‌دست آورد:

$$\phi_n(x)=\phi_n(L\xi)=A_1\mathrm{Sinh}(M\xi)+A_2\mathrm{Cosh}(M\xi)+A_3\mathrm{Sin}(N\xi)+A_4\mathrm{Cos}(N\xi) \qquad (۸)$$

که در آن $\xi=x/L$ و $A_i\ (i=1,2,3,4)$ ثوابت مجهولی هستند که از اعمال شرایط مرزی به‌دست می‌آیند. پارامترهای N و M عبارتند از:

$$\begin{aligned} M&=L\sqrt{\frac{P}{2EI}+\sqrt{\left(\frac{P}{2EI}\right)^2-\left(K-(\frac{\rho A}{EI})\omega_n^2\right)}} =\sqrt{T+\sqrt{T^2-\left(KL^4-\Omega_n^2\right)}}\\ N&=L\sqrt{-\frac{P}{2EI}+\sqrt{\left(\frac{P}{2EI}\right)^2-\left(K-(\frac{\rho A}{EI})\omega_n^2\right)}} =\sqrt{-T+\sqrt{T^2-\left(KL^4-\Omega_n^2\right)}}\end{aligned} \qquad (۹)$$

در رابطهٔ اخیر $T=PL^2/2EI$ نیروی محوری بی‌بُعد و $\Omega_n=\omega_n L^2\sqrt{\rho A/EI}$ فرکانس طبیعی بی‌بُعد متناظر می‌باشد. برای تیر با شرایط تکیه‌گاهی یکسر گیردار و تحت نیروی محوری، شرایط مرزی بصورت روابط (۱۰) می‌باشند.

$$\phi_n(\xi)\big|_{\xi=0}=0,\quad \frac{d\phi_n(\xi)}{d\xi}\bigg|_{x=0}=0,\quad \frac{d^2\phi_n(\xi)}{d\xi^2}\bigg|_{\xi=1}=0,\quad \frac{d^3\phi_n(\xi)}{d\xi^3}\bigg|_{\xi=1}-T\frac{d\phi_n(\xi)}{d\xi}\bigg|_{\xi=1}=0 \qquad (۱۰)$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 1\\ M & 0 & N & 0\\ M^2\mathrm{Sinh}M & M^2\mathrm{Cosh}M & -N^2\mathrm{Sin}N & -N^2\mathrm{Cos}N\\ (M^3-TM)\mathrm{Cosh}M & (M^3-TM)\mathrm{Sinh}M & -(N^3+TN)\mathrm{Cosh}N & (N^3+TN)\mathrm{Sin}N \end{bmatrix}\begin{Bmatrix}A_1\\A_2\\A_3\\A_4\end{Bmatrix}=0 \qquad (۱۱)$$

با جایگذاری رابطهٔ (۹) در شرایط مرزی فوق، معادلات لازم برای محاسبهٔ ثوابت مجهول $A_i\ (i=1\rightarrow 4)$ به‌صورت رابطهٔ (۱۱) به‌دست می‌آید.

برای این‌که دستگاه معادلات جبری همگن (۱۱) دارای جواب غیربدیهی باشد، باید دترمینان ماتریس ضرایب برابر صفر بشود. با مساوی صفر قرار دادن دترمینان ماتریس ضرایب معادلهٔ مشخصهٔ سیستم به‌صورت معادلهٔ (۱۲-الف) به‌دست می‌آید.

$$(M^3-TM)(\sinh M-\alpha\cosh M)-(N^3+TN)\left(\frac{M}{N}\sin N+\alpha\cos N\right)=0 \qquad (۱۲\text{-الف})$$

که در آن ضریب α از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\alpha=\frac{M^2\cosh M+N^2\cos N}{M^2\sinh M+N^2\sin N} \qquad (۱۲\text{-ب})$$

از حل معادلهٔ (۱۲-الف) فرکانس‌های طبیعی بی‌بُعد سیستم، Ω_n، که وابسته به پارامترهای هندسی و نیروی محوری می‌باشند، به‌دست می‌آیند.

پس از محاسبهٔ فرکانس‌های طبیعی و جایگذاری آن در رابطهٔ (۸)، شکل مود طبیعی nاُم به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$\phi_n(x)=\phi_n(L\xi)=\cosh(M\xi)-\cos(N\xi)-\frac{M^2\cosh(M)+N^2\cos(N)}{M^2\sinh(M)+N^2\sin(N)}\left\{\sinh(N\xi)-\frac{M}{N}\sin(N\xi)\right\} \qquad (۱۳)$$

در غیاب نیروی محوری، $T=0$، معادلات (۱۳ و ۱۲) به معادلهٔ مشخصه و شکل مود طبیعی تیراویلر- برنولی یکسر گیردار در غیاب نیروی محوری تبدیل می‌شوند.

برای تیر اویلر- برنولی با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها شکل مودهای طبیعی به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$\phi_n(x)=\sin\left(\frac{n\pi}{L}x\right) \qquad (۱٤)$$

پس از به‌دست آوردن شکل مودهای ارتعاشی تیر اویلر- برنولی تحت نیروی محوری، با جایگذاری پاسخ فرضی (٦) در معادلهٔ حرکت، معادلهٔ دیفرانسیل معمولی زیر حاصل می‌شود:

$$\begin{aligned}&EI\sum_{i=1}^{n}c_i\frac{d^4\phi_i(x)}{dx^4}-\rho A\omega^2\sum_{i=1}^{n}c_i\phi_i(x)\\&-\left(P+F_P\{H(x-x_1)-H(x-x_2)\}\right)\sum_{i=1}^{n}c_i\frac{d^2\phi_i(x)}{dx^2}=0\end{aligned} \qquad (۱۵)$$

با ضرب طرفین معادلهٔ اخیر در $\phi_j(x)$ و انتگرال‌گیری در بازهٔ $[0,L]$ خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}&EI\sum_{i=1}^{n}\int_0^L\phi_j(x)\frac{d^4\phi_i(x)}{dx^4}dx-P\sum_{i=1}^{n}\int_0^L\phi_j(x)\frac{d^2\phi_i(x)}{dx^2}dx\\&-F_P\sum_{i=1}^{n}\int_{x_1}^{x_2}\phi_j(x)\frac{d^2\phi_i(x)}{dx^2}dx-\rho A\omega^2\sum_{i=1}^{n}\int_0^L\phi_j(x)\phi_i(x)dx=0\end{aligned} \qquad (۱٦)$$

معادلهٔ اخیر را به فرم ماتریسی می‌توان به‌صورت زیر نوشت [10]:

$$\left([K]-\omega^2[M]\right)\{C\}=0 \qquad (۱۷)$$

رابطهٔ اخیر معرف معادله مشخصه حاکم بر رفتار ارتعاشی تیر اویلر- برنولی تحت نیروی محوری و تأثیروصله‌های پیزوالکتریک می‌باشد که در آن ω فرکانس‌های طبیعی سیستم بوده و مؤلفه‌های ماتریس‌های سفتی و جرم $[K]$ و $[M]$ به‌صورت رابطهٔ (۱۸) می‌باشند.

$$\begin{aligned}k_{ij}&=EI\int_0^L\phi_j(x)\frac{d^4\phi_i(x)}{dx^4}dx\\&\quad-T\int_0^L\phi_j(x)\frac{d^2\phi_i(x)}{dx^2}dx-F\int_{x_1}^{x_2}\phi_j(x)\frac{d^2\phi_i(x)}{dx^2}dx\\m_{ij}&=\rho A\int_0^L\phi_j(x)\phi_i(x)dx\end{aligned} \qquad (۱۸)$$

برای این‌که دستگاه معادلات جبری همگن (۱۷) دارای جواب غیربدیهی باشد، باید دترمینان ماتریس ضرایب برابر صفر باشد. در نتیجه معادلهٔ مشخصهٔ سیستم از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\det([K]-\Omega_n^2[M])=0 \qquad (۱۹)$$

از حل معادلهٔ اخیر فرکانس‌های طبیعی سیستم که علاوه بر مشخصات هندسی و مکانیکی تیر به اندازهٔ نیروی محوری و ولتاژ اعمالی به محرک پیزوالکتریک بستگی دارد، به‌دست می‌آید.

نتایج عددی

در این بخش، به بررسی عددی نتایج حاصل از مدل‌سازی ریاضی قسمت قبل به‌منظور بررسی رفتار ارتعاشی و پایداری مکانیکی تیر اویلر- برنولی با شرایط تکیه‌گاهی دو سر ساده و یکسر گیردار که دو قطعهٔ پیزوالکتریک به‌صورت متقارن به وجوه بالایی و پایینی آن متصل شده‌اند، پرداخته می‌شود. خواص فیزیکی و مشخصات هندسی تیر و وصله‌های پیزوالکتریک استفاده شده در شبیه‌سازی در جدول (۱) آورده شده است. نتایج عددی برحسب پارامترهای بی‌بعد نسبت فرکانسی و نسبت بار بحرانی ارائه

شده‌اند. نسبت فرکانسی (یا بار بحرانی) به‌صورت نسبت فرکانس‌طبیعی (یا بار بحرانی) تیر در حضور وصلهٔ پیزوالکتریک به فرکانس‌طبیعی (یا بار بحرانی) تیر در غیاب وصلهٔ پیزوالکتریک تعریف می‌شود.

جدول ۱ خواص هندسی و مکانیکی تیر و وصله‌های پیزوالکتریک

	تیر	پیزوالکتریک
مدول یانگ (GPa)، E	210	66.7
چگالی (Kg/m^3)، ρ	7740	8500
ثابت پیزوالکتریک (C/m^2)، $\bar{e}_{31}$	–	17.8
عرض (cm)، b	4	3.2
ارتفاع (cm)، h	0.3	0.0254

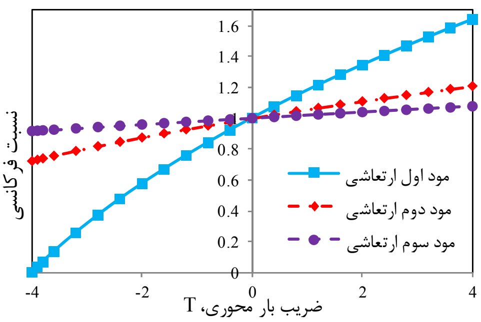
جدول ۲ مقایسهٔ فرکانس‌های طبیعی تیر با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها به‌دست آمده از مدل ارائه شده و حل دقیق [24]

		فرکانس طبیعی، (rad/s)	
شرایط مرزی		ω_1	ω_2
دو سر ساده	حل ارائه شده	186.77	721.19
	حل دقیق [24]	186.78	721.19

جدول ۳ مقایسهٔ نسبت بار بحرانی تیر با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها به‌دست آمده از مدل ارائه شده و نتایج مرجع [10]

ولتاژ (V)	نسبت بار بحرانی	
	حل ارائه شده	مرجع [10]
200	1.051	1.024
400	1.076	1.035
600	1.082	1.045
800	1.094	1.056

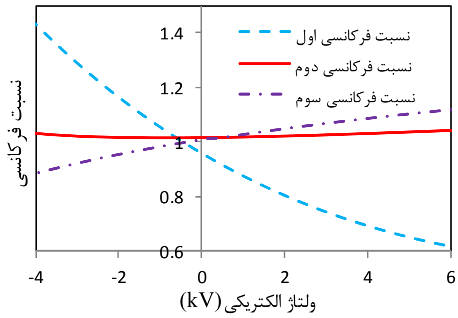
برای اطمینان از صحت نتایج به‌دست آمده در این تحقیق، ابتدا در جدول (۲) مقادیر فرکانس‌های طبیعی اول و دوم تیر اویلر-برنولی یکسر گیردار تحت نیروی محوری بدون وصلهٔ پیزوالکتریک با نتایج حل دقیق [24] مورد مقایسه قرار گرفته است. سپس در جدول (۳)، نسبت بار بحرانی به‌دست آمده از مدل ارائه شده با نتایج مرجع [10] به‌ازای مقادیر مختلف ولتاژ اعمالی به وصلهٔ پیزوالکتریک برای تیر با شرایط تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها مقایسه گشته است. در استخراج نتایج از مشخصات هندسی و مکانیکی مشابه مرجع [10] استفاده شده است. مقایسهٔ نتایج تطابق خوب بین نتایج را نشان می‌دهد. علت اختلاف جزئی بین مقادیر حاصل از کار حاضر نسبت به مرجع [10] استفاده از تئوری و روش‌های حل مختلف می‌باشد.



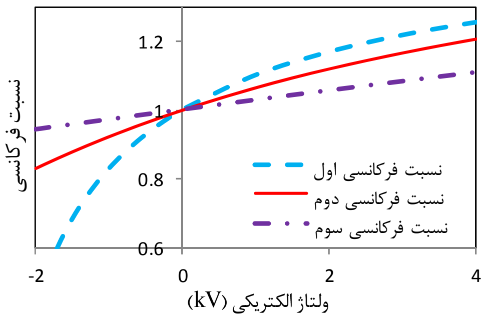
شکل ۲ تأثیر نیروی محوری بر نسبت فرکانسی در غیاب اعمال ولتاژ الکتریکی

در شکل (۲) تأثیر نیروی محوری در ولتاژ صفر بر نسبت فرکانسی برای سه مود ارتعاشی اول تیر یکسر گیردار نشان داده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود نیروی محوری تأثیر قابل توجهی بر فرکانس‌های طبیعی تیر دارد. نیروی محوری کششی با افزایش سفتی سازه باعث افزایش فرکانس‌های طبیعی و در مقابل نیروی محوری فشاری، باعث کاهش فرکانس‌های طبیعی می‌شود. با افزایش بار محوری فشاری، در یک مقدار خاص مقدار فرکانس طبیعی اول به صفر می‌رسد که به این مقدار نیرو، بار بحرانی گفته می‌شود. برای تیر اویلر-برنولی یکسر گیردار، بار بحرانی برابر $P_{cr}=\dfrac{\pi^2 EI}{(2L)^2}$ می‌باشد [24] که با توجه به مقادیر عددی جدول (۱) مقدار آن برابر 186.3N به‌دست می‌آید. با توجه به شکل (۲)، مقدار نیروی متناظر با فرکانس طبیعی صفر برابر 186.3N به‌دست می‌آید و این نشان می‌دهد مدل با دقت مناسبی رفتار

ارتعاشی را پیش‌بینی می‌کند. هم‌چنین با توجه به شکل مشاهده می‌شود، تأثیر نیروی محوری بر فرکانس طبیعی اول بسیار قابل‌ملاحظه‌تر از تأثیر آن بر روی فرکانس‌های طبیعی بالاتر است.



(الف)



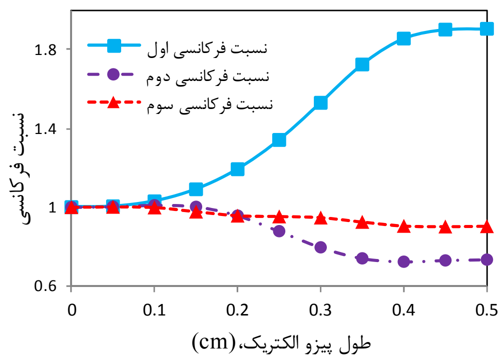
(ب)

شکل ۳ تأثیر ولتاژ اعمالی به محرک‌های پیزوالکتریک بر نسبت فرکانسی تیر اویلر- برنولی با شرایط تکیه‌گاهی (الف) یکسر گیردار (ب) دو سر ساده

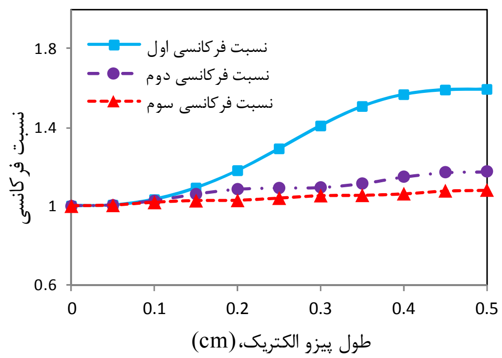
همان‌طور که از رابطهٔ (٦) مشاهده می‌شود پاسخ ارتعاشی تیر علاوه بر مشخصات مکانیکی وصله‌های پیزوالکتریک به ولتاژ اعمالی، طول و موقعیت وصله‌های پیزوالکتریک نیز بستگی دارد. در شکل (۳)، منحنی تغییرات نسبت فرکانسی تیر برحسب ولتاژ اعمالی نشان داده شده است. این شکل به‌ازای طول پیزوالکتریک $45\,mm$ و $x_1 = 5\,mm$ رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود، علاوه بر ولتاژ اعمالی به وصله‌های پیزوالکتریک، جهت ولتاژ نیز تأثیر قابل توجهی بر فرکانس‌های طبیعی دارد. با توجه به پیکربندی دو وصلهٔ پیزوالکتریک در تحقیق حاضر، ولتاژ منفی باعث افزایش طول وصلهٔ پیزوالکتریک و درنتیجه ایجاد نیروی محوری کششی موضعی در تیر می‌شود و ولتاژ مثبت منجر به کاهش طول و در نتیجه ایجاد نیروی محوری فشاری موضعی در تیر می‌گردد. بنابراین، ولتاژ مثبت باعث کاهش و ولتاژ منفی باعث افزایش فرکانس‌های طبیعی می‌شود. با توجه به این‌که اثر نیروی محوری در رفتار ارتعاشی و پایداری تیر مشابه وصله‌های پیزوالکتریک متقارن به‌کارگرفته شده می‌باشد، بنابراین اعمال ولتاژ منفی که باعث افزایش فرکانس‌های طبیعی می‌شود در افزایش ظرفیت بار بحرانی تیر نیز بسیار تأثیرگذار می‌باشد. علاوه بر این، نتایج نشان می‌دهد که تأثیر ولتاژ الکتریکی بر تغییرات فرکانس طبیعی اول نسبت به تأثیر آن بر تغییرات فرکانس‌های بالاتر قابل‌ملاحظه می‌باشد.

به‌منظور نشان دادن تأثیر طول وصلهٔ پیزوالکتریک و شرایط مرزی بر رفتار ارتعاشی تیر، در شکل (٤) سه نسبت فرکانسی اول برحسب طول وصله‌های پیزوالکتریک و در غیاب نیروی محوری مکانیکی آورده شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود با افزایش طول محرک‌های پیزوالکتریک، تأثیر آن بر فرکانس‌های طبیعی افزایش می‌یابد. میزان طول مؤثر برای اثرگذاری بیشتر بر روی رفتار ارتعاشی به ولتاژ اعمالی به محرک‌های پیزوالکتریک بستگی دارد. به‌طوری‌که با توجه به شکل (٤) مشاهده می‌شود به‌ازای ولتاژ $1000\,V$، وصله‌های پیزوالکتریک با طول کمتر از ۲۰٪ طول تیر، تأثیر بسیار کمی بر فرکانس طبیعی دارند و هم‌چنین با افزایش طول محرک‌ها اثر آنها روی فرکانس‌های طبیعی بیشتر می‌شود تا این‌که بعد از رسیدن به مقدار مشخصی (۸۰٪ طول تیر) تأثیر آن بر تغییر فرکانس‌های طبیعی به مقدار ثابتی میل می‌کند. بنابراین وصله‌های پیزوالکتریک نزدیک به انتهای گیردار تیر تأثیر کمتری بر تغییرات فرکانس‌های طبیعی تیر دارد و با نزدیک شدن آن به انتهای آزاد تیر

تأثیرگذاری آنها بیشتر می‌شود. نتایج نشان می‌دهد که به‌منظور استفادهٔ بهینه، استفاده از محرک‌های پیزوالکتریک و اعمال ولتاژ الکتریکی ورودی کمتر بایستی طول مؤثر و موقعیت محرک‌های پیزوالکتریک به شکل مناسبی تعیین شوند.



(الف)

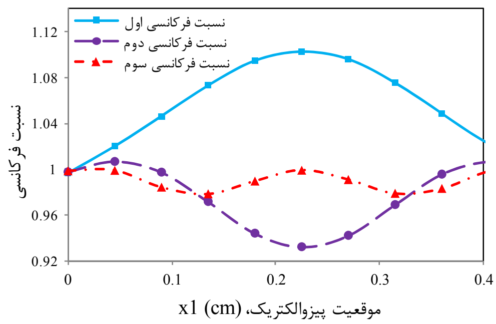


(ب)

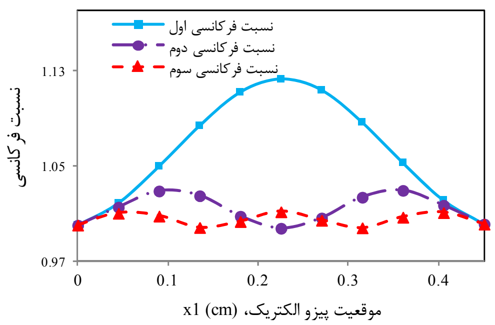
شکل ٤ تأثیر طول محرک‌های پیزوالکتریک بر نسبت فرکانسی تیر با شرایط تکیه‌گاهی (الف) یکسر گیردار (ب) دو سر ساده

در شکل‌های (٦ و ٥)، تأثیر موقعیت محرک پیزوالکتریک بر نسبت فرکانسی تیر نشان داده شده است. به‌ازای طول ثابت محرک پیزوالکتریک، هرچه محرک به انتهای گیردار نزدیک باشد، تأثیر آن بر سفتی معادل سازه کمتر است و اثر کمتری بر تغییرات فرکانس طبیعی خواهد داشت. هم‌چنین تأثیر وصله‌های پیزوالکتریک بر تغییرات فرکانس طبیعی اول به‌مراتب بیشتر از تأثیر آن بر فرکانس‌های طبیعی بالاتر می‌باشد.

به‌ازای ولتاژ 1000V حداکثر افزایش فرکانس طبیعی اول تیر با شرایط مرزی یکسر گیردار و دو سر ساده به‌ترتیب ۱۰٪ و ۱۳٪ می‌باشد. بنابراین برای استفادهٔ بهینه از محرک‌های پیزوالکتریک باید محرک پیزوالکتریک در مکان مناسب قرار گیرد تا با اعمال کمترین ولتاژ، بیشترین تأثیر را بر روی فرکانس‌های طبیعی و بار بحرانی تیر ایجاد نمود.



شکل ٥ تأثیر موقعیت محرک پیزوالکتریک بر نسبت فرکانسی تیر با شرایط تکیه‌گاهی یکسر گیردار

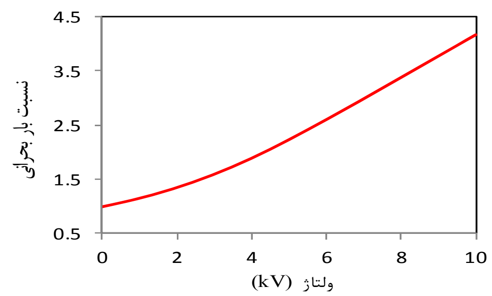


شکل ٦ تأثیر موقعیت محرک پیزوالکتریک بر نسبت فرکانسی تیر با تکیه‌گاه‌های ساده در دو انتها

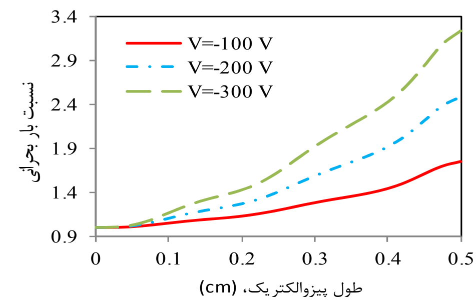
به‌منظور نشان دادن تأثیر ولتاژ اعمالی به محرک‌های پیزوالکتریک بر بار کمانش تیر، در شکل (٧) تغییرات بار کمانش تیر یکسر گیردار برحسب ولتاژ و طول محرک پیزوالکتریک برابر 4.5mm رسم شده است. همان‌طور که مشاهده می‌شود استفاده از محرک پیزوالکتریک تأثیر قابل‌ملاحظه‌ای بر افزایش بار کمانش تیر دارد و ولتاژ 1000V باعث افزایش ۱۸٪ در

بار بحرانی تیر می‌شود.

در شکل (۸)، تأثیر طول پیزوالکتریک بر نسبت بار بحرانی تیر یکسر گیردار به‌ازای مقادیر مختلف ولتاژ نشان داده شده است. با افزایش طول محرک پیزوالکتریک نیروی محوری کششی ایجاد شده توسط لایه‌های متقارن محرک‌های پیزوالکتریک بیشتر می‌شود و در نتیجه بار بحرانی تیر افزایش می‌یابد. نتایج نشان می‌دهد که استفاده از لایهٔ پیزوالکتریک که به‌طور کامل سطح تیر را تحت پوشش قرار می‌دهد، اعمال ولتاژ 100 V باعث افزایش ۷۵٪ در بار بحرانی تیر می‌شود.

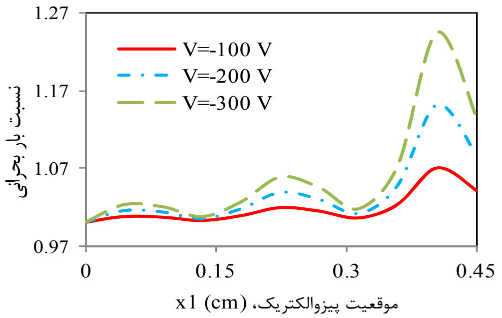


شکل ۷ تأثیر ولتاژ اعمالی به محرک‌های پیزوالکتریک بر روی بار بحرانی تیر یکسر گیردار



شکل ۸ تأثیر طول پیزوالکتریک بر نسبت بار بحرانی تیر یکسر گیردار

شکل (۹) اثر موقعیت محرک پیزوالکتریک بر روی نسبت بار بحرانی تیر به‌ازای طول محرک 4.5 mm را نشان می‌دهد. نتایج نشان می‌دهد به‌ازای طول محرک و ولتاژ ثابت، با نزدیک شدن محرک به انتهای آزاد تیر یکسر گیردار، اثر آن بر افزایش بار بحرانی تیر بیشتر می‌شود. با توجه به نتایج مشاهده می‌شود که محرک پیزوالکتریک واقع در موقعیت 0.4 cm از انتهای گیردار بیشترین اثر را بر روی افزایش بار بحرانی تیر دارد.



شکل ۹ تأثیر موقعیت پیزوالکتریک بر نسبت بار بحرانی تیر یکسر گیردار

نتیجه گیری

در این پژوهش با استفاده از مدل تحلیلی به بررسی تأثیر پارامترهای محرک پیزوالکتریک که به‌صورت دو وصلهٔ متقارن به تیر متصل شده‌اند، بر رفتار ارتعاشی تیر اویلر-برنولی پرداخته شد. مقایسهٔ نتایج حاصل از مدل‌سازی (فرکانس‌های طبیعی) با نتایج حل دقیق موجود نشان می‌دهد که مدل ارائه شده برای بررسی رفتار ارتعاشی سازه مورد نظر از دقت قابل قبولی برخوردار است. نتایج نشان می‌دهد علاوه بر جنس محرک پیزوالکتریک، ولتاژ اعمالی، موقعیت و طول آن بر فرکانس‌های طبیعی تیر تأثیرگذار می‌باشند و با تعیین موقعیت و طول بهینهٔ محرک‌های پیزوالکتریک می‌توان با اعمال حداقل ولتاژ الکتریکی بیشترین تغییرات را در فرکانس‌های طبیعی و بار بحرانی تیر به‌دست آورد. هم‌چنین تأثیر محرک پیزوالکتریک بر فرکانس طبیعی اول نسبت به فرکانس‌های طبیعی بالاتر قابل‌ملاحظه‌تر می‌باشد. علاوه بر این، نتایج نشان می‌دهد که بار بحرانی تیر به ولتاژ اعمالی، موقعیت و طول پیزوالکتریک حساسیت قابل‌ملاحظه‌ای دارد و

می‌توان با تعیین پارامترهای بهینه بار بحرانی را به‌صورت چشم‌گیری افزایش داد. این روش یکی از شیوه‌های کاربردی به‌منظور افزایش ظرفیت باربری و هم‌چنین تغییرات در فرکانس‌های طبیعی به‌منظور فاصله‌گیری از نواحی رزونانسی (تشدید) در سازه‌های تحت ارتعاش اجباری می‌باشد.

مراجع

1. Chopra, I., "Review of state of art of smart structures and integrated systems", *AIAA journal*, 40(11), pp. 2145-2187, (2002).
2. Zhang, Z., Kan, J., Cheng, G., Jia, Y. and Wang, H., "Influence of multiple piezoelectric effects on sensors and actuators", *Mechanical Systems and Signal Processing*, 35(1), pp. 95-107, (2013).
3. Waisman, H. and Abramovich, H., "Variation of natural frequencies of beams using the active stiffening effect", *Composites Part B: Engineering*, 33(6), pp. 415-424, (2002).
4. Asadi, K., Ahmadian, H. and Jalali, H., "Micro/macro slip damping in beams with frictional contact interface", *Journal of Sound and Vibration*, 331(21), pp. 4704–4712, (2012).
5. Vashist, S.K. and Chhabra, D., "Optimal placement of piezoelectric actuators on plate structures for active vibration control using genetic algorithm", *In SPIE Smart Structures and Materials Nondestructive Evaluation and Health Monitoring. International Society for Optics and Photonics*, pp. 905720-905732, (2014).
6. Hernandes, J.A., Almeida, S.F.M. and Nabarrete, A., "Stiffening effects on the free vibration behavior of composite plates with PZT actuators", *Composite structures*, 49(1), pp. 55-63, (2000).
7. Wang, Q. and Quek, S.T., "Enhancing flutter and buckling capacity of column by piezoelectric layers", *International journal of solids and structures*, 39(16), pp. 4167-4180, (2002).
8. Sadek, I., Kucuk, I., Zeini, E., Adali, S., "Optimal boundary control of dynamics responses of piezo actuating micro-beams", *Applied Mathematical Modeling*, 33(8), pp. 3343–3353, (2009).
9. Maurini, C., Pouget, J. and Vidoli, S., "Distributed piezoelectric actuation of a bistable buckled beam", *European Journal of Mechanics-A/Solids*, 26(5), pp. 837-853, (2007).
10. Wang, Q., "On buckling of column structures with a pair of piezoelectric layers", *Engineering structures*, 24(2), pp. 199-205, (2002).
11. Kayacık. O., et al., "Integral equation approach for piezo patch vibration control of beams with various types of damping", *Computers and Structures*, 86, pp. 357–366, (2008).
12. Sridharan, S. and Kim, S., "Piezo-electric control of stiffened panels subject to interactive buckling", *International Journal of Solids and Structures*, 46(6), pp. 1527-1538, (2009).
13. Przybylski, J.,"Stability of an articulated column with two collocated piezoelectric actuators", *Engineering Structures*, 30(12), pp. 3739-3750, (2008).
14. Wang, Q., Varadan, V.K., "Transition of the buckling load of beams by the use of piezoelectric layers", *Smart materials and structures*, 12(5), pp. 696-702, (2003).
15. Della, C.N. and Shu, D., "Vibration of beams with piezoelectric inclusions", *International journal of solids and structures*, 44(7), pp. 2509-2522, (2007).
16. Sloss, J.M., Bruch, J.C., Sadek, I.S. and Adali, S., "Piezo patch sensor/actuator control of the vibrations of a cantilever under axial load", *Composite Structures*, 62(3), pp. 423-428, (2003).
17. Chhabra, D., Narwal, K. and Singh, P., "Design and Analysis of Piezoelectric Smart Beam for Active Vibration Control", *International Journal of Advancements in Research & Technology*, 1(1), pp. 1-5, (2012).

18. Aldraihem, O.J., Singh, T. and Wetherhold, R.C., "Optimal size and location of piezoelectric actuator/sensors: practical considerations", *Journal of Guidance, Control, and Dynamics*, 23(3), pp. 509-515, (2000).
19. Khdeir, A.A. and Aldraihem, O.J., "Deflection analysis of beams with extension and shear piezoelectric patches using discontinuity functions", *Smart Materials and Structures*, 10(2), p. 212, (2001).
20. Aldraihem, O.J. and Khdeir, A.A., "Precise deflection analysis of beams with piezoelectric patches", *Composite Structures*, 60(2), pp. 135-143, (2003).
21. Nikkhoo, A., "Investigating the behavior of smart thin beams with piezoelectric actuators under dynamic loads", *Mechanical Systems and Signal Processing*, 45(2), pp. 513-530, (2014).
22. Ducarne, J., Thomas, O. and Deü, J.F., "Placement and dimension optimization of shunted piezoelectric patches for vibration reduction", *Journal of Sound and Vibration*, 331(14), pp. 3286-3303, (2012).
23. Crawley, E.F. and De Luis, J., "Use of piezoelectric actuators as elements of intelligent structures", *AIAA Journal*, 25(10), pp. 1373-1385, (1987).
24. Lawrence, N., "*Virgin-Vibration of Axially-Loaded Structures*", Cambridge University Press, (2007).
25. Wang, Q. and Wang, C.M., "Optimal placement and size of piezoelectric patches on beams from the controllability perspective", *Smart Materials and Structures*, 9(4), pp. 558–567, (2000).